數學傳播　46卷4期, pp. 29-34

再談「圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和」—兼談 108 數學課綱之複數教學

張鎮華

1. 森棚教官的數學題

數學傳播季刊最近有一篇楊玉星的文章 [1], 討論「圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和」。文章由科學研習月刊森棚教官的數學題 [2] 出發 :「畫正三角形與外接圓, 然後在圓上任取一點, 則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩頂點的距離和。」這是一個可愛的平面幾何問題, 可以用來練習平面幾何的證明技術。

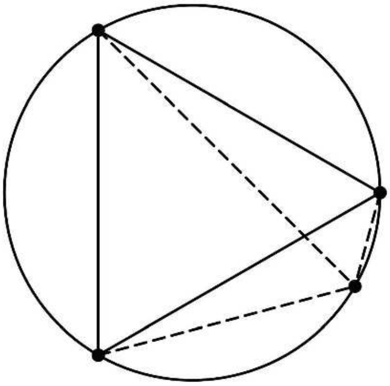

圖1: 畫正三角形與外接圓。

楊玉星的文章將前述森棚教官的數學題, 由正三角形推廣到正多邊形, 再逐漸的把距離推廣到距離的平方、三次方、四次方、直到一般的冪次。是一篇很用心撰寫的文章。

初看這些結果時猜想, 這樣可愛的定理, 可能已經有人做過。可是查了一些網頁, 都未見到國際上的參考資料, 倒是有若干國內科展的文章 [3] [4], 多年來有一些成果。

後來查到數學傳播季刊 1987 年朱建正的徵答問題 11101 的解答 [5], 就提到, 一般正奇數邊形的問題是 73 年高中數學競試初試第六題, 所以這樣的問題倒不是現在才有。只是推廣到高次冪的結果, 看起來似乎不容易。

楊玉星的文章利用歐拉公式

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha\ (\text{其中 }\alpha\text{ 爲實數}),$$

推得 $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$, 從而 $\cos\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$、$\sin\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$, 藉由二項式定理推導了許多正弦、餘弦的相關公式, 用來發展距離冪次和公式。

本文要利用複數的計算, 直接討論距離冪次和公式, 繞過正弦、餘弦的相關公式。

2. 一般性問題的描述

我們先來描述一般性的問題。考慮圖 2 的正 n 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 及其外接圓, 可以假設其爲以複數平面的原點 $O(0,0)$ 爲圓心的單位圓, 而 A_k 所代表的複數爲 1 的第 k 個 n 次方根

$$\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

其中 $k=0,1,2,\ldots,n-1$。不失一般性, 假設點 P 落在弧 A_0A_{n-1} 上。

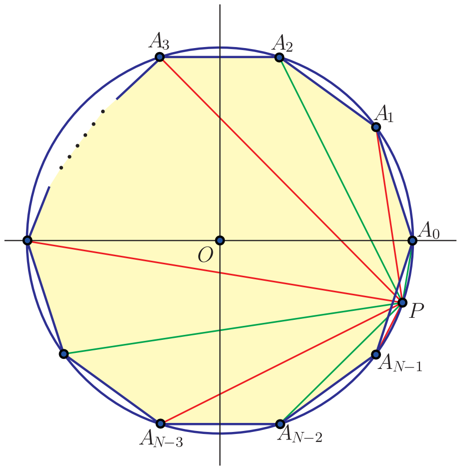

圖2: 正 n 邊形及其外接圓。[1]

楊玉星的文章在利用歐拉公式推導了許多正弦、餘弦的相關公式之後, 很詳細的推導了新舊的距離冪次和公式, 如下所述 (公式前的號碼是此公式出處的文章), 下面這些式子裡 n 和 m 的用法和其文章的寫法不同。

[3] 當 $n\geq 3$ 爲奇數時, $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{n-2}}=\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{n-1}}$。

[3] 當 $n\geq 4$ 爲偶數時, $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{n-1}}^2=\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_{n-2}}^2$。

[1] 當 $n\geq 5$ 爲奇數時, $\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{n-2}}^3=\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{n-1}}^3$。

[1] 當 $n \geq 6$ 爲偶數時, $\overline{PA_1}^4 + \overline{PA_3}^4 + \cdots + \overline{PA_{n-1}}^4 = \overline{PA_0}^4 + \overline{PA_2}^4 + \cdots + \overline{PA_{n-2}}^4$。

[4] 當 $n \geq m+2 \geq 4$ 均爲偶數時, $\overline{PA_1}^m + \overline{PA_3}^m + \overline{PA_5}^m + \cdots + \overline{PA_{n-1}}^m = \overline{PA_0}^m + \overline{PA_2}^m + \overline{PA_4}^m + \overline{PA_6}^m + \cdots + \overline{PA_{n-2}}^m$。

[1] 當 $n \geq m+2 \geq 3$ 均爲奇數時, $\overline{PA_1}^m + \overline{PA_3}^m + \overline{PA_5}^m + \cdots + \overline{PA_{n-2}}^m = \overline{PA_0}^m + \overline{PA_2}^m + \overline{PA_4}^m + \overline{PA_6}^m + \cdots + \overline{PA_{n-1}}^m$。

最後兩個式子涵蓋了前面的四個特例。而最後兩個式子乍看起來雖然不同, 但其實是同一個定理, 也就是, 可以將它們合寫爲：當 $n \geq m+2 \geq 3$, 而且 n 和 m 同時爲奇數或同時爲偶數時, 會有

$$\overline{PA_0}^m - \overline{PA_1}^m + \overline{PA_2}^m - \overline{PA_3}^m + \cdots + (-1)^{n-1}\overline{PA_{n-1}}^m = 0, \tag{1}$$

如果用和的符號, 可以寫爲

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\overline{PA_k}^m = 0. \tag{2}$$

下面我們將會直接證明這個公式, 不再分奇偶討論。

3. 善用棣美弗定理

楊玉星的文章利用歐拉公式推導了許多正弦、餘弦的相關公式, 用以證明前述的距離冪次和公式。可以期望, 直接利用複數的公式, 應該有機會證明式 (1)、也就是式 (2)。爲了讓高中學生能理解, 我們避免複數的指數次方的運算, 採用棣美弗定理, 也能達到同樣的功效。棣美弗定理是說, 對於實數 α 和 β

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta),$$

這是高中生會學到的內容, 以前的數學課綱放在一年級教導, 因爲它其實是三角比的和角公式的另一種呈現; 現在的數學課綱則放在三年級, 只有數學甲才有此內容。

首先, 我們要計算 $\overline{PA_k}$。因爲點 P 落在弧 A_0A_{n-1} 上, 它所代表的複數爲 $\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$、其中 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$, 而點 A_k 所代表的複數爲

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

若以射線 $\overrightarrow{OP}$ 爲始邊、射線 $\overrightarrow{OA_k}$ 爲終邊, 就有廣義角 $\theta + \frac{2\pi k}{n}$。若此角在一個平角之內, 則三角形 POA_k 以兩條單位長的邊 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OA_k}$ 夾了角 $\theta + \frac{2\pi k}{n}$, 其角平分線垂直平分對邊

$\overline{PA_k}$, 所以

$$\overline{PA_k}=2\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big); \tag{3}$$

另一種情況是, 角 $\theta+\frac{2\pi k}{n}$ 超過一個平角, 則三角形 POA_k 以兩條單位長的邊 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OA_k}$ 夾了角 $2\pi-(\theta+\frac{2\pi k}{n})$, 此時就會有

$$\overline{PA_k}=2\sin\Big(\pi-(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n})\Big)=2\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big),$$

得到一樣的公式。

如果直接將式 (3) 的結果代入式 (2) 左邊, 就要處理一大堆正弦值, 並不容易。此時可以善用棣美弗定理, 考慮複數

$$z=\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big)+i\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big),$$

取其共軛複數、或是其乘法反元素, 就得到

$$z^{-1}=\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big)-i\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{n}\Big),$$

後式減去前式之後再乘以 i, 就有

$$\overline{PA_k}=2\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi k}{2}\Big)=i(z^{-1}-z).$$

看起來好多了, 不過這裡的 z 還是相對複雜, 不容易處理, 這就到了棣美弗定理上場的時機, 也就是, 連續使用此定理 k 次之後得到

$$z=\Big(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\Big)\Big(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\Big)^k=uv^k,$$

其中

$$u=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\quad 而\quad v=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}.$$

現在可以來計算式 (2) 左邊的和, 看看它是否真的等於 0:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\overline{PA_k}^m&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big(i(z^{-1}-z)\Big)^m\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^k i^m C_\ell^m(z^{-1})^{m-\ell}(-z)^\ell,\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}(-1)^k i^m C_\ell^m(z^{-1})^{m-\ell}(-z)^\ell&=i^m C_\ell^m(-1)^\ell(-1)^k z^{2\ell-m}\\&=i^m C_\ell^m(-1)^\ell(-1)^k(uv^k)^{2\ell-m}\\&=i^m C_\ell^m(-1)^\ell u^{2\ell-m}(-v^{2\ell-m})^k,\end{aligned}$$

將這個化簡的結果代入式 (4), 並且交換兩個和的順序, 得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^k i^m C_\ell^m (z^{-1})^{m-\ell}(-z)^\ell$$
$$=\sum_{\ell=0}^{m}\Big(i^m C_\ell^m (-1)^\ell u^{2\ell-m}\sum_{k=0}^{n-1}(-v^{2\ell-m})^k\Big). \tag{5}$$

最後計算幾何級數

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-v^{2\ell-m})^k=\frac{1-(-v^{2\ell-m})^n}{1+v^{2\ell-m}}=\frac{1-(-1)^n(v^n)^{2\ell-m}}{1+v^{2\ell-m}},$$

其中 $v^n=(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})^n=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, 再度用到棣美弗定理。所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(-v^{2\ell-m}\big)^k=\frac{1-(-1)^n(-1)^{2\ell-m}}{1+v^{2\ell-m}}=\frac{1-(-1)^{n+2\ell-m}}{1+v^{2\ell-m}}=0, \tag{6}$$

這裡很重要的是, n 和 m 同時爲奇數或同時爲偶數時, 所以會有 $n+2\ell-m$ 爲偶數, 才能算出 $1-(-1)^{n+2\ell-m}=1-1=0$。

最後將式 (6) 的結果代入式 (5), 再代入式 (4), 就證得式 (2)。

4. 108 數學課綱之複數教學

最後來看一下108數學課綱對於複數教學的安排。

在95數學課綱或之前的數學課綱, 高中一年級承接國中小經驗, 在已知自然數、分數、小數、負數、根數等先備知識後, 引進實數的名稱, 雖然沒容量、也不必要說明實數的完備性, 但總會證明根數爲無理數, 一方面當作反證法的重要例子, 再則是反映發現無理數的重要歷史。

接著會介紹複數, 擴大對於「數」的視野。雖然無從證明代數基本定理, 但總會敘述一下, 甚至會利用共軛複數的觀念, 證明實係數多項式複數根共軛成對的性質。而到了三角函數的和角公式時, 自然的接上棣美弗定理, 由此解 1 的 n 次方根, 一方面是對代數基本定理在特例時的交代, 再則棣美弗定理的確提供了計算上的好處, 就如我們在前一節見到的例子。

就實用上來說, 自然數、分數、小數、負數等概念在生活上已經夠用, 當作國民基本教育, 到 7 年級大致上學習完成。後續的根數、指數、對數、三角比等概念, 對於進階的數學, 在理科、電資、工程、財經等有其必要。但是像實數的完備性的論證, 只要是數學架構的講究, 高中階段就無必要學習; 而無理數的論證, 在高中階段也是邏輯訓練的好例子而已。

至於在高中學習複數, 就不是最緊迫的事情。老實說, 如果只是學會複數加、減、乘、除的意思, 對整體數學了解的幫忙並不多。到了像棣美弗定理這樣的複數幾何, 對有些人又會有一點難。基於這樣的觀點, 108 數學課綱做了一次新的嘗試, 將複數的學習由高一的內容中抽離, 放

在高三的部定選修數學課程, 其中也只有數學甲才學習棣美弗這樣的複數幾何的概念。這樣的調整, 整體看起來並不會影響高中數學的養成, 又可讓一些無法適應、但其實用不到相關內容的學生免於受苦, 我們認爲很可行。

參考文獻

1. 楊玉星。圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和。數學傳播季刊, 46(1), 69-83, 2022。
2. 游森棚。森棚教官的數學題: 正三角形的線段定和。科學研習月刊, 第 56 卷第 10 期 (106 年 9 月)。
3. 王啟光。正 $2n+1$ 邊形外接圓上一點到各頂點的距離關係。高中數學學科中心電子報第53期 (2011 年3月) https://ghresource.k12ea.gov.tw/uploads/1698375988613M5Tu192u.pdf。
4. 姜硯凱、李婕安、張暄輪。「圓」中註「定」—圓內接多邊形圓上一點到多邊形頂點、過頂點的切線與對角線距離的關係。中華民國第 60 屆中小學科展。
5. 朱建正。徵答問題11101：以複數方法解正多邊形外接圓問題。數學傳播季刊, 11(1), 65-66, 1987。

—本文作者爲臺灣大學數學系名譽教授—